

2.1 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $ax + \beta = 0$

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Εξίσωση 1^{ου} βαθμού με άγνωστο x

Κάθε εξίσωση που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή $ax + \beta = 0$.

Το x είναι ο άγνωστος, το a ο συντελεστής του αγνώστου και το β ο σταθερός όρος

2.

Λύση εξίσωσης : Είναι ο αριθμός με τον οποίο πρέπει να αντικαταστήσουμε τον άγνωστο ώστε η εξίσωση να γίνει αληθινή αριθμητική ισότητα (επαληθεύεται η εξίσωση)

3.

Επαλήθευση εξίσωσης : Είναι η διαδικασία με βάση την οποία ελέγχουμε την ορθότητα της λύσης μιας εξίσωσης

4.

Αδύνατη εξίσωση : Είναι η εξίσωση που δεν έχει λύση.

Μία αδύνατη εξίσωση είναι της μορφής $0x = a$ όπου $a \neq 0$

5.

Αόριστη εξίσωση ή ταυτότητα : Είναι η εξίσωση που αληθεύει για οποιαδήποτε τιμή του αγνώστου.

Μία αόριστη εξίσωση είναι της μορφής $0x = 0$

6.

Λύσεις της εξίσωσης $ax + \beta = 0$:

- Όταν $a \neq 0$, η εξίσωση έχει μία **μόνο λύση** την $x = -\frac{\beta}{a}$
- Όταν $a = 0$, η εξίσωση είναι ή **αδύνατη** ή **αόριστη**

Ειδικότερα : Όταν είναι και το $\beta = 0$, η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = 0$, οπότε η εξίσωση είναι αόριστη

Όταν είναι $\beta \neq 0$, η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x = -\beta$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Πορεία επίλυσης εξίσωσης : Απαλοιφή παρονομαστών (εφ' όσον υπάρχουν)

Εκτέλεση πολλαπλασιασμών (εφ' όσον υπάρχουν)

Χωρισμός γνωστών από τους αγνώστους

Αναγωγή ομοίων όρων (πρόσθεση αγνώστων – πρόσθεση γνωστών)

Διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου

Απλοποίηση αποτελέσματος

2.

Ειδική περίπτωση : Αν μία εξίσωση περιέχει κλάσματα τα οποία πολλαπλασιάζονται με παρενθέσεις που επίσης περιέχουν κλάσματα τότε για να μην κάνουμε την ίδια δουλειά πολλές φορές πρώτα κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς αυτούς και μετά όλα τα υπόλοιπα.

3.

Για την επαλήθευση : Στην αρχική εξίσωση, αντικαθιστάμε τον άγνωστο με τη λύση που βρήκαμε και ελέγχουμε αν προκύπτει ισότητα.

4.

Συντελεστής του αγνώστου το 0 : Όταν η εξίσωση φθάνει στη μορφή $0 \cdot x = 0$, να θυμόμαστε ότι η εξίσωση είναι ή αδύνατη ή αόριστη.

5.

Εξίσωση με παράμετρο : Όταν η εξίσωση εκτός από το x έχει κι άλλο γράμμα που λέγεται παράμετρος. Π.χ $(\lambda - 1)x = 5$

6.

Ειδική έρευνα (διερεύνηση) : Διάκριση περιπτώσεων όταν η εξίσωση έχει παράμετρο και είμαστε έτοιμοι να διαιρέσουμε με το συντελεστή του αγνώστου.

Οι περιπτώσεις είναι δύο

1^ο) συντελεστής του αγνώστου $\neq 0$

2^ο) συντελεστής του αγνώστου $= 0$

7.

Μέθοδος : Αν θέλω η εξίσωση $ax = b$

- i) να έχει μοναδική λύση, υποχρεώνω να είναι $a \neq 0$
- ii) να είναι αόριστη, υποχρεώνω να είναι $a = 0$ και $b = 0$
- iii) να είναι αδύνατη, υποχρεώνω να είναι $a = 0$ και $b \neq 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

- i) Η εξίσωση $2x = 12$ έχει λύση το 6 Σ
- ii) Η εξίσωση $3x - x = x$ έχει λύση το 0 Σ
- iii) Η εξίσωση $3x + 2 = 2$ είναι ταυτότητα Λ
- iv) Η εξίσωση $0x = 0$ είναι ταυτότητα Σ
- v) Η εξίσωση $0x = 3$ είναι αδύνατη Σ
- vi) Οι εξισώσεις $x = 4$ και $2x - 8 = 0$ έχουν λύση τον ίδιο αριθμό Σ

Προτεινόμενη λύση

- i) Για $x = 6$ η εξίσωση γίνεται $12 = 12$ που είναι αληθές. Πρόταση Σ
- ii) Για $x = 0$ η εξίσωση γίνεται $0 = 0$ που είναι αληθές. Πρόταση Σ
- iii) Η εξίσωση γράφεται $3x + 2 - 2 = 0$ άρα $3x = 0$ οπότε $x = 0$. Πρόταση Λ
- iv) Ναι από θεωρία
- v) Ναι από θεωρία
- vi) Η πρώτη έχει λύση το 4, η δεύτερη για $x = 4$ γίνεται $8 - 8 = 0$ αληθές.
Πρόταση Σ

2.

Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $3x = 6$	α. 5
2. $-x + 5 = 0$	β. 9
3. $\frac{x}{3} + 1 = 4$	γ. 2
4. $3x = -10 + x$	δ. -5

Προτεινόμενη λύση

- 1. $3x = 6$ άρα $x = 2$ οπότε $1 \rightarrow \gamma$
- 2. $-x + 5 = 0$ άρα $5 = x$ οπότε $2 \rightarrow \alpha$
- 3. $\frac{x}{3} + 1 = 4$ άρα $3 \cdot \frac{x}{3} + 3 = 12$ άρα $x + 3 = 12$ άρα $x = 9$ οπότε $3 \rightarrow \beta$
- 4. $3x = -10 + x$ άρα $3x - x = -10$ άρα $2x = -10$ άρα $x = -5$ οπότε $4 \rightarrow \delta$

3.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

$$\text{i)} \frac{3x-5}{5} - \frac{2x+15}{3} = 6 - \frac{3x+10}{15}$$

$$\text{ii)} \frac{x-8}{2} - \frac{2-2x}{3} = \frac{x+6}{2} + \frac{2x}{3}$$

$$\text{iii)} 2x - \frac{5x-12}{4} = 3 + \frac{3x}{4}$$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\frac{3x-5}{5} - \frac{2x+15}{3} = 6 - \frac{3x+10}{15} \quad \text{άρα} \quad 15 \cdot \frac{3x-5}{5} - 15 \cdot \frac{2x+15}{3} = 15 \cdot 6 - 15 \cdot \frac{3x+10}{15}$$

Σχόλιο 1

$$3(3x-5) - 5(2x+15) = 90 - (3x+10)$$

$$9x - 15 - 10x - 75 = 90 - 3x - 10$$

$$9x - 10x + 3x = 90 + 15 + 75 - 10$$

$$2x = 170$$

$$x = \frac{170}{2} = 85$$

ii)

$$\frac{x-8}{2} - \frac{2-2x}{3} = \frac{x+6}{2} + \frac{2x}{3} \quad \text{άρα} \quad 6 \cdot \frac{x-8}{2} - 6 \cdot \frac{2-2x}{3} = 6 \cdot \frac{x+6}{2} + 6 \cdot \frac{2x}{3}$$

Θεωρία 4

$$3(x-8) - 2(2-2x) = 3(x+6) + 2 \cdot 2x$$

$$3x - 24 - 4 + 4x = 3x + 18 + 4x$$

$$3x + 4x - 3x - 4x = 18 + 24 + 4$$

$$0x = 46 \text{ εξίσωση αδύνατη}$$

iii)

$$2x - \frac{5x-12}{4} = 3 + \frac{3x}{4} \quad \text{άρα} \quad 4 \cdot 2x - 4 \cdot \frac{5x-12}{4} = 4 \cdot 3 + 4 \cdot \frac{3x}{4}$$

Θεωρία 5

$$8x - 1(5x-12) = 12 + 3x$$

$$8x - 5x + 12 = 12 + 3x$$

$$8x - 5x - 3x = 12 - 12$$

$$0x = 0 \text{ εξίσωση αόριστη ή ταυτότητα}$$

4.

Η εξίσωση $(2\lambda-6)x = \lambda-3$ είναι ταυτότητα όταν :

A. $\lambda = 1$, B. $\lambda = 2$, Γ. $\lambda = 0$, Δ. $\lambda = 3$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση

Σχόλιο 7

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $2\lambda-6=0$ και $\lambda-3=0$

$$2\lambda = 6 \quad \text{και} \quad \lambda = 3$$

$$\lambda = 3 \quad \text{και} \quad \lambda = 3 \quad \text{Άρα} \quad \lambda = 3$$

Επομένως σωστό το Δ

5.

Συμπληρώστε την πρόταση : Η εξίσωση $(\lambda - 6)x = 8$ είναι αδύνατη όταν $\lambda = \dots$ **6.**

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $\lambda - 6 = 0$ άρα $\lambda = 6$

Η πρόταση συμπληρωμένη φαίνεται παραπάνω

6.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $\frac{x-4}{5} - \frac{x-3}{2} = \frac{4x-1}{3}$

ii) $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} + 1$

iii) $x + \frac{x+4}{2} = \frac{3x}{2} + 2$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\frac{x-4}{5} - \frac{x-3}{2} = \frac{4x-1}{3} \quad \text{άρα} \quad 30 \cdot \frac{x-4}{5} - 30 \cdot \frac{x-3}{2} = 30 \cdot \frac{4x-1}{3}$$

$$6(x-4) - 15(x-3) = 10(4x-1)$$

$$6x - 24 - 15x + 45 = 40x - 10$$

$$6x - 15x - 40x = 24 - 45 - 10$$

$$-49x = -31$$

$$x = \frac{-31}{-49} = \frac{31}{49}$$

ii)

$$x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} + 1 \quad \text{άρα} \quad 3x - 3 \cdot \frac{x}{3} = 3 \cdot \frac{2x}{3} + 1 \cdot 3$$

$$3x - x = 2x + 3$$

$$3x - x - 2x = 3$$

$$0x = 3 \text{ αδύνατη η εξίσωση}$$

iii)

$$x + \frac{x+4}{2} = \frac{3x}{2} + 2 \quad \text{άρα} \quad 2x + 2 \cdot \frac{x+4}{2} = 2 \cdot \frac{3x}{2} + 2 \cdot 2$$

$$2x + 1(x+4) = 3x + 4$$

$$2x + x + 4 = 3x + 4$$

$$2x + x - 3x = 4 - 4$$

$$0x = 0 \text{ ταυτότητα η εξίσωση}$$

7.

Ομοίως οι εξισώσεις

$$\text{i)} \frac{x+1}{4} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20} + \frac{2x-1}{5}$$

$$\text{ii)} \frac{2x}{15} + \frac{x-6}{12} = \frac{3}{10} \left(\frac{x}{2} - 5 \right)$$

$$\text{iii)} \frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7} \right) = 3$$

$$\text{iv)} \frac{3x}{2} - 5 = \frac{x}{2} + \frac{2x+7}{2}$$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{4} + \frac{3x+1}{2} &= \frac{27x+19}{20} + \frac{2x-1}{5} \quad \text{άρα} \\ 5(x+1) + 10(3x+1) &= 1(27x+19) + 4(2x-1) \\ 5x+5+30x+10 &= 27x+19+8x-4 \\ 5x+30x-27x-8x &= 19-4-5-10 \\ 0x &= 0 \quad \text{ταυτότητα η εξίσωση} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \frac{2x}{15} + \frac{x-6}{12} &= \frac{3}{10} \left(\frac{x}{2} - 5 \right) \quad \text{άρα} \quad \frac{2x}{15} + \frac{x-6}{12} = \frac{3x}{20} - \frac{15}{10} \\ 60 \cdot \frac{2x}{15} + 60 \cdot \frac{x-6}{12} &= 60 \cdot \frac{3x}{20} - 60 \cdot \frac{15}{10} \\ 4 \cdot 2x + 5(x-6) &= 3 \cdot 3x - 6 \cdot 15 \\ 8x + 5x - 30 &= 9x - 90 \\ 8x + 5x - 9x &= 30 - 90 \\ 4x &= -60 \\ x &= -\frac{60}{4} = -15 \end{aligned}$$

Σχόλιο 2

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7} \right) &= 3 \quad \text{άρα} \quad 14 \cdot \frac{9x+7}{2} - 14 \cdot \left(x - \frac{x-2}{7} \right) = 14 \cdot 3 \\ 7(9x+7) - 14x + 14 \cdot \frac{x-2}{7} &= 42 \\ 63x + 49 - 14x + 2(x-2) &= 42 \\ 63x + 49 - 14x + 2x - 4 &= 42 \\ 63x - 14x + 2x &= 42 - 49 + 4 \\ 51x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{51} = -\frac{1}{17} \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \frac{3x}{2} - 5 &= \frac{x}{2} + \frac{2x+7}{2} \quad \text{άρα} \quad 2 \cdot \frac{3x}{2} - 2 \cdot 5 = 2 \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot \frac{2x+7}{2} \\ 3x - 10 &= x + (2x+7) \\ 3x - 10 &= x + 2x + 7 \\ 3x - x - 2x &= 7 + 10 \\ 0x &= 17 \quad \text{εξίσωση αδύνατη} \end{aligned}$$

8.Για ποια τιμή του λ οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες ;

i) $\lambda x = 6$

ii) $(\lambda + 1)x = 2$

iii) $(\lambda - 3)x = 7$

iv) $\lambda x - 10 = 15 - 2x$

v) $\lambda x + x + 2 = 3x + 6$

Σχόλιο 7

Προτεινόμενη λύση**i)**

$\lambda x = 6 \quad \text{Πρέπει } \lambda = 0$

ii)

$(\lambda + 1)x = 2 \quad \text{Πρέπει } \lambda + 1 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = -1$

iii)

$(\lambda - 3)x = 7 \quad \text{Πρέπει } \lambda - 3 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 3$

iv)

$\text{Η εξίσωση } \lambda x - 10 = 15 - 2x \text{ γράφεται } \lambda x + 2x = 15 + 10$
 $(\lambda + 2)x = 25$

$\text{Πρέπει } \lambda + 2 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = -2$

v)

$\text{Η εξίσωση } \lambda x + x + 2 = 3x + 6 \text{ γράφεται } \lambda x + x - 3x = 6 - 2$
 $\lambda x - 2x = 4$
 $(\lambda - 2)x = 4$

$\text{Πρέπει } \lambda - 2 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 2$

9.Για ποια τιμή του λ οι παρακάτω εξισώσεις είναι αόριστες ;

i) $\lambda x + 5 = 10 + 2x - 5$

ii) $\lambda x + 10 = 3x + 10$

iii) $\lambda x - 5 = x - 10 + 5$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 7

i)

$\text{Η εξίσωση } \lambda x + 5 = 10 + 2x - 5 \text{ γράφεται } \lambda x - 2x = 10 - 5 - 5$
 $(\lambda - 2)x = 0$

$\text{Πρέπει } \lambda - 2 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 2$

ii)

$\text{Η εξίσωση } \lambda x + 10 = 3x + 10 \text{ γράφεται } \lambda x - 3x = 10 - 10$
 $(\lambda - 3)x = 0$

$\text{Πρέπει } \lambda - 3 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 3$

iii)

$\text{Η εξίσωση } \lambda x - 5 = x - 10 + 5 \text{ γράφεται } \lambda x - x = -10 + 5 + 5$
 $(\lambda - 1)x = 0$

$\text{Πρέπει } \lambda - 1 = 0 \quad \text{άρα } \lambda = 1$

10.

Για ποιες τιμές των λ και μ οι παρακάτω εξισώσεις είναι αόριστες ;

i) $(\lambda - 1)x = \mu + 2$

ii) $(3\lambda + 1)x = \mu$

iii) $\lambda x - 1 = \mu - 3x$

iv) $\lambda x - \mu = 7x + 3\mu - 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$(\lambda - 1)x = \mu + 2 \quad \text{Πρέπει } \lambda - 1 = 0 \text{ και } \mu + 2 = 0 \text{ δηλαδή}$$

$$\lambda = 1 \quad \text{και } \mu = -2$$

ii)

$$(3\lambda + 1)x = \mu \quad \text{Πρέπει } 3\lambda + 1 = 0 \text{ και } \mu = 0 \text{ δηλαδή}$$

$$3\lambda = -1 \quad \text{και } \mu = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{3} \quad \text{και } \mu = 0$$

iii)

Η εξίσωση $\lambda x - 1 = \mu - 3x$ γράφεται $\lambda x + 3x = \mu + 1$

$$(\lambda + 3)x = \mu + 1$$

Πρέπει $\lambda + 3 = 0$ και $\mu + 1 = 0$ δηλαδή

$$\lambda = -3 \quad \text{και } \mu = -1$$

iv)

Η εξίσωση $\lambda x - \mu = 7x + 3\mu - 1$ γράφεται $\lambda x - 7x = 3\mu - 1 + \mu$

$$(\lambda - 7)x = 4\mu - 1$$

Πρέπει $\lambda - 7 = 0$ και $4\mu - 1 = 0$ δηλαδή

$$\lambda = 7 \quad \text{και } 4\mu = 1$$

$$\lambda = 7 \quad \text{και } \mu = \frac{1}{4}$$